

# 1 Einleitung und Theorie

## 1.1 Historische und experimentelle Bedeutung des Pion-Zerfalls

Der Pionzerfall spielte lange Zeit eine grosse Rolle für die Theorie der schwachen Wechselwirkung. Besonders das überraschend kleine Verzweigungsverhältnis zwischen den Zerfällen über die myonische beziehungsweise die elektronische Leptonenfamilie war ein wesentliches Standbein für die Axial-Vektor-Kopplungstheorie im Rahmen von Fermis Punktwechselwirkungstheorie. Darauf wurde erstmals 1949 von Ruderman und Finkelstein hingewiesen [RuF49]. Eine Kopplung axialer und/oder vektorieller Art führt auf ein Verzweigungsverhältnis von ungefähr

$$R = \frac{\Gamma(\pi \rightarrow e\nu_e)}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu_\mu)} = \frac{m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} \left(\frac{f_\pi^e}{f_\pi^\mu}\right)^2 = 1.28 \cdot 10^{-4} \left(\frac{f_\pi^e}{f_\pi^\mu}\right)^2, \quad (1)$$

während skalare oder pseudoskalare Wechselwirkung ein Verzweigungsverhältnis von  $\frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} \left(\frac{f_\pi^e}{f_\pi^\mu}\right)^2 \sim 5.4$  ergeben würde. In Gleichung (1) steht  $f_\pi^{e/\mu}$  für die Pionzerfallskonstante über die jeweilige Leptonenfamilie. Das Postulat, dass diese Kopplungskonstanten gleich sind, wird mit Leptonenuniversalität bezeichnet und kann durch eine genaue Messung des Verzweigungsverhältnisses im Pionzerfall mit grosser Empfindlichkeit getestet werden.

Weiter unten werden wir das Verzweigungsverhältnis im Rahmen der Fermitheorie berechnen. Dies ist gerechtfertigt, weil die Energieskala durch die Pionmasse  $m_\pi$  gegeben wird, die mit 139.6 MeV weit unterhalb der Masse der schwachen Eichbosonen W (80.3 GeV) liegt. Allerdings müssen für Präzisionsexperimente dennoch Strahlungskorrekturen (aus der Eichtheorie) berücksichtigt werden. Zudem kann man in einer Messanordnung im allgemeinen nicht feststellen, ob beim Zerfall noch zusätzlich reelle Photonen erzeugt wurden. Das dementsprechend korrigierte Verzweigungsverhältnis wurde zu

$$R = \frac{\Gamma(\pi \rightarrow e\nu_e) + \Gamma(\pi \rightarrow e\nu_e\gamma)}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu_\mu) + \Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu_\mu\gamma)} = 1.233 \cdot 10^{-4} \quad (2)$$

berechnet. Von verschiedenen Forschungsgruppen ist dieser Wert auch mit grosser Genauigkeit gemessen worden [And60, DiC63, Bry86].

In der Weinberg-Salam-Glashow-Theorie gibt es Korrekturen zur obigen Formel, die auf das Higgsboson zurückgehen und letztlich eine pseudoskalare Kopplung zwischen Meson und Leptonen bewirken. Da der Pionzerfall aufgrund der Helizitätsverhältnisse bei Axial-Vektor-Kopplung viel schwächer ist, als es bei einer pseudoskalaren Kopplung der Fall wäre, ist die Vermessung des Pionzerfalls viel empfindlicher auf solche Higgs-Effekte als andere Reaktionen und deshalb interessant, um Massenschranken für das Higgsboson zu erhalten.

Die Helizitätsunterdrückung ist insbesondere aufgrund der Masselosigkeit der Neutrinos so effektiv. Sie wäre schwächer, wenn die Neutrinos Masse hätten. Das ist ein ähnlicher Effekt wie jener, der zur Bevorzugung des myonischen Zerfalls führt und auf der grösseren Masse des Myons beruht, wie unten noch besprochen wird. Das Pionzerfallsexperiment gibt daher auch Informationen über Massenschranken der Neutrinos.

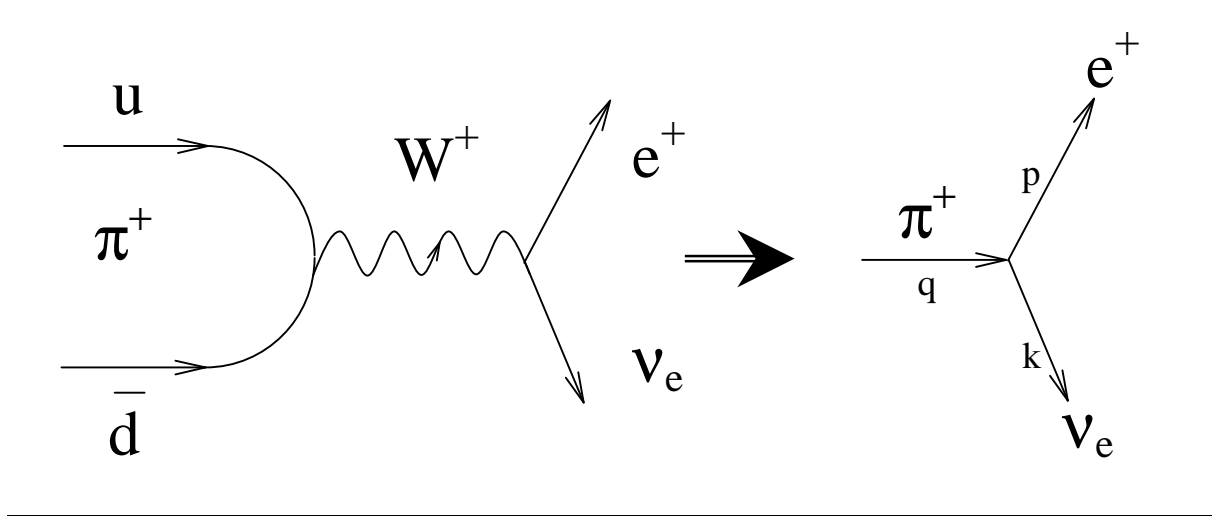


Abbildung 1: Feynmandiagramm zum Pionzerfall

## 1.2 Der Pionzerfall

Wir wollen nun die Zerfallswahrscheinlichkeit des Pions berechnen (siehe das Feynmandiagramm in Abbildung 1). Wir tun dies simultan für beide leptonenischen Zerfallskanäle. Der Index  $l$  steht dabei für  $e$  oder  $\mu$ . Die Viererimpulse des Pions, des geladenen Leptons und des Neutrinos bezeichnen wir mit  $q$ ,  $p$  und  $k$ . In erster Ordnung Störungstheorie gilt für Übergangswahrscheinlichkeiten pro Zeiteinheit ganz allgemein die Formel

$$dW = \frac{1}{T} |S_{fi}|^2 \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad (3)$$

wobei  $T$  die Streuzeit und  $V$  das betrachtete Volumen ist. Die Phasenraumfaktoren sind entsprechend der Normierung der Wellenfunktionen auf Deltafunktionen gewählt. Das Übergangselement ist in der Fermitheorie durch den lorentzinvarianten Ausdruck

$$S_{fi} = -i \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \theta_c \int d^4 x J_\alpha^{(\pi)\dagger}(x) J_{(l)}^\alpha(x) \quad (4)$$

gegeben, wobei  $G$  die Fermi-Kopplungskonstante ist und  $\theta_c$  der Cabibbowinkel, der berücksichtigt, dass das u-Quark im Pion nicht direkt an das d-Quark koppelt, sondern an die Linearkombination  $\cos \theta_c d + \sin \theta_c s$ .

Gleichung (4) ist der allgemeine Ausdruck für eine Axial-Vektor-Kopplung. Der hadronische Strom des Pions muss ein rein axialer Strom sein, da das pseudoskalare Meson ins skalare Vakuum übergeht. Mangels weiterer Strukturinformationen für das Pion, die man nur aus einem Quarkmodell des Mesons gewinnen könnte, müssen wir den Strom proportional zum Impuls, dem einzigen Vierervektor, den wir zur Verfügung haben, annehmen:

$$J_\alpha^{(\pi)\dagger}(x) = f_\pi^l q_\alpha \frac{e^{-iqx}}{\sqrt{2q^0 V}}. \quad (5)$$

Der Faktor  $f_\pi^l$  ist die sogenannte Pionzerfallskonstante. Wenn Universalität gilt, hängt er nicht von der Leptonfamilie  $l$  ab. Für den leptonenischen Strom nehmen wir vorerst die

vom Standardmodell vorgeschriebene V-A-Kopplung an:

$$J_{(l)}^\alpha(x) = \bar{v}_l(p, s) \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{2p^0 V}} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_\nu(k, t) \frac{e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{2k^0 V}}. \quad (6)$$

(4), (5) und (6) in (3) eingesetzt, liefert

$$W = \frac{1}{T} \int \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{s,t} \left| \frac{iG \cos \theta_c}{\sqrt{2}} \frac{f_\pi^l q_\alpha}{\sqrt{2q^0 V}} \frac{\bar{v}_l(p, s)}{\sqrt{2p^0 V}} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \frac{u_\nu(k, t)}{\sqrt{2k^0 V}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p - k) \right|^2. \quad (7)$$

Ersetzen wir hier gemäss der üblichen Regel

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \rightarrow VT, \quad (8)$$

so erhalten wir

$$W = \frac{G^2 \cos^2 \theta_c f_\pi^l{}^2}{2} \int \frac{1}{2q^0} \frac{d^3 p}{2p^0 (2\pi)^3} \frac{d^3 k}{2k^0 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p - k) \sum_{s,t} |M|^2. \quad (9)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \sum_{s,t} |M|^2 &= \sum_{s,t} \bar{v}_l \not{q} (1 - \gamma_5) u_\nu \bar{u}_\nu \not{k} (1 - \gamma_5) v_l \\ &= \text{Tr} [(\not{p} - m_l) \not{q} (1 - \gamma_5) \not{k} \not{k} (1 - \gamma_5)] = 2 \text{Tr} [(\not{p} - m_l) \not{q} \not{k} \not{k} (1 - \gamma_5)] \\ &= 2 \text{Tr} [\not{p} (\not{p} + \not{k}) \not{k} (\not{p} + \not{k}) (1 - \gamma_5)] = 2m_l^2 \text{Tr} [\not{k} \not{p} (1 - \gamma_5)] = 8m_l^2 k \cdot p. \end{aligned} \quad (10)$$

Hier haben wir in der zweiten Zeile die Identitäten:

$$\begin{aligned} \sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) &= \not{p} - m \\ \gamma^\mu \gamma_5 &= -\gamma_5 \gamma^\mu \\ (1 - \gamma_5)^2 &= 2(1 - \gamma_5) \end{aligned}$$

verwendet, sowie in der dritten Zeile die Impulserhaltung  $q = p + k$  (aufgrund der Deltafunktion) und  $\not{p}^2 = m_l^2$ ,  $\not{k}^2 = 0$ . Ausserdem verschwindet die Spur einer ungeraden Zahl von Gammamatrizen (auch kombiniert mit  $\gamma_5$ ), und es ist

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = 4g^{\mu\nu}. \quad (11)$$

Das Viererprodukt  $p \cdot k$  ist aufgrund der Viererimpulserhaltung gegeben durch die Beziehung

$$m_\pi^2 = q^2 = (p + k)^2 = m_l^2 + 2p \cdot k \quad \rightarrow \quad p \cdot k = \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2}. \quad (12)$$

Es bleiben noch die Phasenraumintegrale. Wir erhalten im Ruhesystem des Pions ( $q = (m_\pi, \vec{0})$ ) nach Integration über  $p$

$$W = \frac{G^2 \cos^2 \theta_c f_\pi^l{}^2}{2(2\pi)^2 2m_\pi} 8m_l^2 \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2} \int \frac{d^3 k}{2k^0} \frac{1}{2\sqrt{(k^0)^2 + m_l^2}} \delta(k^0 + \sqrt{(k^0)^2 + m_l^2} - m_\pi). \quad (13)$$

Das Integral berechnet sich nach den Regeln der Deltafunktionen zu

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3k}{2k^0} \frac{1}{2\sqrt{(k^0)^2 + m_l^2}} \delta(k^0 + \sqrt{(k^0)^2 + m_l^2} - m_\pi) \\
&= \int_0^\infty \frac{dk^0 \pi k^0}{\sqrt{(k^0)^2 + m_l^2}} \delta(k^0 + \sqrt{(k^0)^2 + m_l^2} - m_\pi) \\
&= \frac{\pi k^0}{\sqrt{m_l^2 + (k^0)^2} \left(1 + \frac{k^0}{\sqrt{m_l^2 + (k^0)^2}}\right)} \Big|_{k^0 = \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi}} = \pi \frac{(m_\pi^2 - m_l^2)}{2m_\pi^2}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Insgesamt ist nun die Zerfallsrate im leptonicen Kanal  $l$

$$W = \frac{G^2 \cos^2 \theta_c (f_\pi^l)^2 m_l^2}{8\pi} \frac{m_l^2}{m_\pi^3} (m_\pi^2 - m_l^2)^2, \tag{15}$$

woraus sofort das Verzweigungsverhältnis (1) folgt.

Wir wollen noch diskutieren, was passiert, wenn wir im leptonicen Strom eine allgemeinere Axial-Vektor-Kopplung annehmen. Der leptoniche Strom lautet dann

$$J_{(l)}^\alpha(x) = \bar{v}_l(p, s) \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{2p^0 V}} \gamma^\alpha (C_V - C_A \gamma_5) u_\nu(k, t) \frac{e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{2k^0 V}}. \tag{16}$$

In der zweiten Zeile von Gleichung (10) steht dann anstelle von  $2(1 - \gamma_5)$  der Ausdruck

$$(C_V - C_A \gamma_5)^2 = C_V^2 + C_A^2 - 2C_V C_A \gamma_5. \tag{17}$$

Benutzt man wieder die Impulserhaltung, so erhält man

$$\sum_{s,t} |M|^2 = m_l^2 \text{Tr} \left[ \not{k} \not{p} (C_V^2 + C_A^2 - 2C_V C_A \gamma_5) \right] = 4(C_V^2 + C_A^2) m_l^2 k \cdot p \tag{18}$$

Das Verzweigungsverhältnis ist also dasselbe wie für V-A, da der neue Faktor  $C_V^2 + C_A^2$  nicht vom Lepton abhängt.

Bei skalarer Kopplung würde man den hadronischen Anteil einfach ansetzen als

$$J^{(\pi)\dagger}(x) = f_\pi' \frac{e^{-iq \cdot x}}{\sqrt{2q^0 V}} \tag{19}$$

und für den leptonicen Anteil

$$J_{(l)}(x) = \bar{v}_l(p, s) \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{2p^0 V}} (C_S + C_P \gamma_5) u_\nu(k, t) \frac{e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{2k^0 V}}. \tag{20}$$

In der Summe über Spins stünde dann

$$\sum_{s,t} |M|^2 = \text{Tr} \left[ (\not{p} - m_l) (C_S + C_P \gamma_5) \not{k} (C_S + C_P \gamma_5) \right] = 4(C_S^2 - C_P^2) k \cdot p. \tag{21}$$

Im Vergleich zu (18) fehlt hier bloss das Massenquadrat des Leptons, so dass das Verzweigungsverhältnis im Gegensatz zu (1) gegeben wäre durch

$$R = \frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} \left( \frac{f_\pi^{e'}}{f_\pi^{\mu'}} \right)^2 \sim 5.4 \left( \frac{f_\pi^{e'}}{f_\pi^{\mu'}} \right)^2. \tag{22}$$

Das bestätigt die in der Einleitung gemachten Bemerkungen.

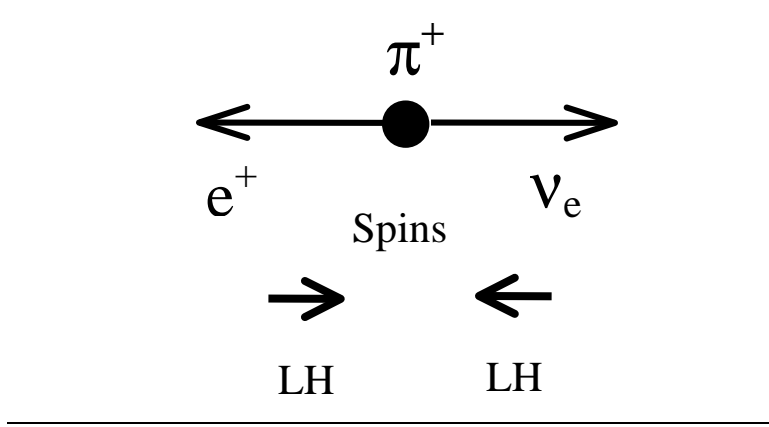


Abbildung 2: Helizitätsverhältnisse im Pionzerfall

Zum Schluss wollen wir zeigen, dass man die Helizitätsunterdrückung auch ganz anschaulich verstehen kann (siehe Abbildung 2): Ruht das Pion vor dem Zerfall, so fliegen Positron und Neutrino in entgegengesetzte Richtung aufgrund der Impulserhaltung. Da das Pion keinen Spin hat, müssen Positron und Neutrino entgegengesetzte Spinpolarisation haben. Das Antineutrino hat aufgrund seiner Masselosigkeit und der V-A-Theorie, die nur an linkshändige Teilchen koppelt, negative Helizität, also Spin entgegen der Bewegungsrichtung. Folglich muss auch das Positron negative Helizität haben. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist nun aber in der V-A-Theorie, die nur an rechtshändige Positronen koppelt, mit dem Faktor  $\frac{1}{2}(1 - \beta)$  unterdrückt, wo  $\beta$  die relativistische Geschwindigkeit des Positrons ist. Denn für einen Positronspinor gilt die Bewegungsgleichung

$$(\not{p} + m)v = 0 \quad (23)$$

Der Helizitätsoperator für Positronen lautet

$$h := \frac{\vec{p} \cdot \vec{\Sigma}}{|\vec{p}|} \quad (24)$$

mit

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} = -\gamma^5 \gamma^0 \vec{\gamma}. \quad (25)$$

Wir wollen nun sehen, wie stark ein Spinor  $v$  mit negativer Helizität durch den V-A-Projektor unterdrückt wird. Es ist

$$hv = -v = -\frac{\gamma^5 \gamma^0 \vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{p}|} v = -\frac{\gamma^5 \gamma^0 (E \gamma^0 + m)}{|\vec{p}|} v = -\frac{E - m \gamma^0}{|\vec{p}|} \gamma^5 v, \quad (26)$$

und es folgt

$$\gamma^5 v = \frac{E + m \gamma^0}{|\vec{p}|} \gamma^5 v. \quad (27)$$

Daraus erhält man nun für den Unterdrückungsfaktor  $F$

$$F = \left\| \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) v \right\|^2 = \frac{1}{4} \left\| \frac{|\vec{p}| - E - m \gamma^0}{|\vec{p}|} v \right\|^2 \quad (28)$$

$$= \frac{1}{4 |\vec{p}|^2} \left[ (|\vec{p}| - E)^2 + m^2 \right] \|v\|^2 + 2m (|\vec{p}| - E) v^\dagger \gamma^0 v. \quad (29)$$

Nun ist bekanntlich

$$v^\dagger \gamma^0 v = \frac{m}{E} \|v\|^2, \quad \text{also} \quad (30)$$

mit  $E = \gamma m$  und  $|\vec{p}| = \beta \gamma$

$$F = \frac{1}{4} \left( \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^2 + \frac{1}{\beta^2} - 1 + 2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{\gamma^2 \beta} \right) = \frac{1 - \beta}{2} \quad (31)$$

Der Pionzerfall in ein leichtes Lepton ist stark unterdrückt, da ein solches bei gleicher Energie viel schneller fliegt als ein schweres Teilchen. Beim Pionzerfall gilt für den Impuls von Positron und Neutrino

$$|\vec{p}| = |\vec{k}| = k^0 = \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{2m_\pi} \quad \text{und} \quad (32)$$

$$E = m_\pi - k^0 = \frac{m_\pi^2 + m_e^2}{2m_\pi}. \quad (33)$$

Für das Positron ergibt sich also

$$F_e = \frac{1}{2}(1 - \beta_e) = \frac{m_e^2}{m_\pi^2 + m_e^2} = 1.34 \cdot 10^{-5} \quad (34)$$

und für das Myon in äquivalenter Weise

$$F_\mu = \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} = 0.364. \quad (35)$$

Allein aufgrund des Helizitätseffektes würde man daher sogar noch ein kleineres Verzweigungsverhältnis erwarten:

$$\frac{F_e}{F_\mu} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_e^2} = 3.68 \cdot 10^{-5}. \quad (36)$$