

# Compton-Effekt

Simon C. Leemann

Abteilung für Physik, ETH Zürich

April 1999

## Inhaltsverzeichnis

1. Zusammenfassung.....	2
2. Problemstellung.....	3
3. Theorie zum Compton-Effekt.....	4
4. Versuchsaufbau.....	9
5. Messung der Energie der gestreuten $\gamma$ -Quanten.....	11
6. Messung des differentiellen Wirkungsquerschnitts.....	13
7. Literaturhinweise.....	17

## 1. Zusammenfassung

Im Jahre 1923 machte Sir Arthur H. Compton Streuversuche mit Röntgenstrahlung an Graphit. Dabei beobachtete er eine vom Streuwinkel abhängige Frequenzverschiebung der Röntgenstrahlung; diese ist aber im Rahmen der klassischen Feldtheorie nicht erklärbar, da die Frequenz als Eigenschaft der Strahlung betrachtet wird und somit keine Verschiebung bei Richtungsänderungen erfahren sollte. Die richtige Erklärung des Effekts konnte Compton unter der Annahme geben, dass die Streuung des Strahlungsflusses mit der Streuung von einzelnen Photonen identisch ist. Dabei streut ein Photon elastisch mit einem freien Elektron und überträgt einen Teil seiner Energie und seines Impulses an das Elektron; dies verursacht die vom Streuwinkel abhängige Frequenzverschiebung.

Bei der Analyse des Streuquerschnitts (Photon-Elektron) zeigt sich allerdings, dass gewisse klassische Annahmen unzulänglich sind und dass das korrekte Ergebnis erst dann herauskommt, wenn die Quantenmechanik und die spezielle Relativitätstheorie herangezogen werden.

Der Versuch von Compton steht somit in einer Reihe historischer Versuche, die die Gültigkeit der korpuskularen Auffassung der elektromagnetischen Strahlung bewiesen und damit zur modernen Quantenphysik führten. Compton wurde für seine Entdeckung mit dem Nobelpreis für Physik im Jahre 1927 ausgezeichnet.

## 2. Problemstellung

In diesem Versuch soll die quantitative Messung des differentiellen Wirkungsquerschnitts der elastischen Streuung von  $\gamma$ -Strahlen an Elektronen erlernt werden. Dazu muss die Theorie zum Compton-Effekt sowie die Wechselwirkungsprozesse von  $\gamma$ -Strahlen mit Materie studiert werden.

Ebenso muss man in der Lage sein, mit dem Detektor und dem benutzten Computerprogramm umzugehen sowie die Grundlagen des Strahlenschutzes beherrschen. Da diese Kenntnisse bereits im Versuch „ $\gamma$ -Spektroskopie“ angeeignet wurden und die entsprechenden Resultate aus meinem dazugehörigen Versuchbericht entnommen werden können, werde ich hier ausschliesslich auf die Messungen und Auswertungen zum Compton-Effekt eingehen.

Nach einer kurzen theoretischen Einführung wird die Gültigkeit der Erklärung von Compton an zwei Messungen gezeigt: Erstens an der Winkelabhängigkeit der Energie der gestreuten Photonen. Zweitens am differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung elektromagnetischer Strahlung an Elektronen und zwar im Rahmen zweier Theorien; dies wird zeigen, dass die Unzulänglichkeiten des (klassischen) Thomsonwirkungsquerschnitts beseitigt werden durch Verwendung der (quantenmechanischen) Klein-Nishina-Formel.

### 3. Theorie zum Compton-Effekt

In diesem Versuch dient  $^{137}\text{Cs}$  als Quelle für die Photonen, die mit 662keV emittiert werden. Die Bindungsenergie des streuenden Pb-Elektrons ist dagegen so klein, dass man es in erster Näherung als frei betrachten kann. Gemäss spezieller Relativitätstheorie hat ein Teilchen der Ruhemasse  $m_0$  und des Impulses  $p$  die Energie:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \quad (3.1)$$

Demzufolge besitzt ein Photon die Energie:

$$E = h\nu \quad (3.2)$$

Und den Impuls:

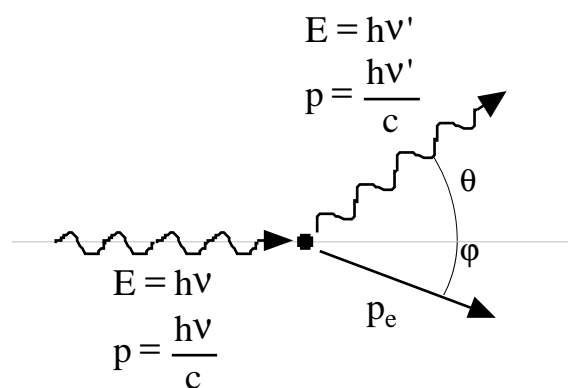
$$p = \frac{h\nu}{c} \quad (3.3)$$

Vernachlässigt man die Bindungsenergie des Elektrons, dessen Rückstoss sowie Quanteneffekte, so bekommt man aus Energie- und Impulserhaltung:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + \sqrt{p_e^2c^2 + m_0^2c^4}$$

$$\frac{\vec{h\nu}}{c} = \frac{\vec{h\nu'}}{c} + \vec{p}_e \quad (3.4)$$

wobei  $\nu'$  die Frequenz des gestreuten Photons und  $p_e$  der Impuls des Elektrons nach dem Streuprozess ist. Aus der Impulserhaltung folgt, dass die drei Impulse in einer Ebene, der sog. Streuebene liegen.



*Fig. 3.1: Schematische Darstellung der elastischen Streuung eines Photons an einem Elektron.*

Über den Cosinussatz und einige Umformungen gelangt man zu:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) =: \lambda_c(1 - \cos\theta) \quad (3.5)$$

wobei  $\lambda_c$  die sog. Comptonwellenlänge des Elektrons ist.

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 0.0243 \text{ \AA} \quad (3.6)$$

Man erkennt an Formel (3.5) sofort, dass die Verschiebung der Wellenlänge  $\Delta\lambda$  nur vom Streuwinkel abhängt, d.h. sie ist unabhängig vom Streumaterial. Für niederenergetische Photonen ist  $\lambda \gg \lambda_c$  und  $\Delta\lambda \sim 0$  (klassischer Grenzfall). Ist aber  $\lambda \ll \lambda_c$  so wird  $\Delta\lambda$  grösser, kann aber den maximalen Wert von  $2\lambda_c$  nicht überschreiten. Deshalb verwendet man (um den Effekt möglichst ausgeprägt zu messen) hochenergetische Strahlung (hier  $\gamma$ -Strahlung).

Die Energie des gestreuten Photons ist:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{m_0c^2}(1 - \cos\theta)} \quad (3.7)$$

und damit ist das Verhältnis zwischen den Energien vor bzw. nach der Streuung:

$$\frac{E'}{E} = \left[ 1 + \frac{E}{m_0c^2}(1 - \cos\theta) \right]^{-1} \quad (3.8)$$

Diese Formel wird im nächsten Abschnitt untersucht werden.

Der Differentielle Wirkungsquerschnitt ist definiert als der Quotient zwischen abgestrahlter Energie pro Zeit- und Raumwinkeleinheit und einfallender Energie pro Zeit- und Flächeneinheit:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{P_{\text{out}}}{d\Omega}}{\frac{P_{\text{in}}}{d\sigma}} = \frac{P_{\text{out}}}{I_0} \quad (3.9)$$

In der klassischen Theorie lässt sich die Photon-Elektronstreuung behandeln; man geht davon aus, dass auf ein Elektron, welches einem äusseren elektrischen Feld ausgesetzt ist, eine beschleunigende Kraft wirkt. Beschleunigte elektrische Ladungen strahlen wiederum elektromagnetische Wellen ab. In der vereinfachten Theorie betrachtet man den einlaufenden Photonenstrahl als linear polarisierte elektromagnetische Welle, die an einem freien Elektron streut. Die einfallende Welle lässt sich darstellen als:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \sin(\omega t) \quad (3.10)$$

Auf das Elektron wirkt dann die Kraft:

$$m_0 \frac{d^2 \vec{z}}{dt^2} = e\vec{E} = e\vec{E}_0 \cdot \sin(\omega t) \quad (3.11)$$

Was die Lösung hat:

$$\vec{z}(t) = -\frac{e}{m_0 \omega^2} \cdot \vec{E}_0 \cdot \sin(\omega t) \quad (3.12)$$

Und das so beschleunigte Elektron strahlt wie ein elektrischer Dipol. Im Abstand  $r$ , der gross sein soll gegenüber der Maximalamplitude des schwingenden Elektrons, ist der Betrag des elektrischen bzw. magnetischen Feldvektors gegeben durch:

$$|\vec{E}'| = \frac{e}{rc^2} \frac{d^2 z}{dt^2} \sin\varphi = \left( \frac{e^2}{r m_0 c^2} \cdot \sin\varphi \right) \cdot E_0 \cdot \sin\omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (3.13)$$

Die abgestrahlte Intensität ist durch den Poyntingvektor gegeben:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}' \times \vec{H}') = \frac{c}{4\pi} \cdot |\vec{E}'|^2 \quad (3.14)$$

Im zeitlichen Mittel beträgt diese Intensität also:

$$I = \overline{S} = \frac{c}{8\pi} (\vec{E}_{\max})^2 = \frac{r_0^2}{r^2} \cdot \frac{c}{8\pi} \cdot E_0^2 \cdot \sin^2\varphi \quad (3.15)$$

Wobei

$$r_0 := \frac{e^2}{m_0 c^2} \quad (3.16)$$

als „klassischer Elektronenradius“ bezeichnet wird. In einem Zeitintervall  $dt$  strahlt das Elektron eine mittlere Energie  $dW$  in ein Raumwinkelement  $d\Omega$  in Richtung  $\varphi$  ab. Die mittlere Strahlungsleistung  $P$  ist dann gegeben durch:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dW}{dt \cdot d\Omega} = I \cdot r^2 = r_0^2 \cdot I_0 \cdot \sin^2\varphi \quad (3.17)$$

Wobei

$$I_0 = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \quad (3.19)$$

die mittlere Intensität der einfallenden Welle ist. Damit ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt nach der in Formel (3.9) gegebenen Definition als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP}{I_0} = r_0^2 \cdot \sin^2 \varphi \quad (3.20)$$

Man erhält daraus den Thomsonwirkungsquerschnitt durch Mittelung über alle möglichen Polarisationsrichtungen der einfallenden Welle:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Thomson}} = r_0^2 \cdot \left( \frac{1 + \cos\theta}{2} \right) \quad (3.21)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ergibt sich durch Integration über alle Streuwinkel:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \cdot r_0^2 \quad (3.22)$$

Der hergeleitete Thomsonwirkungsquerschnitt ist unabhängig von der Frequenz der einfallenden Photonen; dies steht im Widerspruch zu den experimentellen Resultaten. Die Berechnung nach Thomson war nicht relativistisch, Quanteneffekte wurden nicht berücksichtigt und der Elektronenrückstoss wurde vernachlässigt. Diese Tatsachen werden in der sog. Klein-Nishina-Formel berücksichtigt und es zeigt sich im Experiment, dass diese Formel die Ergebnisse viel besser vorhersagt (s. Kapitel 6). Für den Wirkungsquerschnitt bekommt man<sup>1</sup>:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{K-N}} = \frac{r_0^2}{2} \cdot \left( \frac{v'}{v} \right)^3 \cdot \left( \frac{v}{v'} + \frac{v'}{v} - \sin^2\theta \right) \quad (3.23)$$

oder

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{K-N}} = r_0^2 \left[ \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \right]^3 \cdot \left( \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \right) \cdot \left( 1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)[1 + \alpha(1 - \cos\theta)]} \right) \quad (3.24)$$

wobei das Verhältnis zwischen Photonenenergie und Elektronenruhemasse gegeben ist durch:

$$\alpha := \frac{h\nu}{m_0 c^2} \quad (3.25)$$

<sup>1</sup> The Atomic Nucleus, R.D. Evans, McGraw-Hill, 1955



#### 4. Versuchsaufbau

In Figur 4.1 ist ein Schema der Messapparatur. Um die Wirkungsquerschnitte zu berechnen sind genaue Abmessungen nötig. Diese sind in Figur 4.2 und 4.3 angegeben.

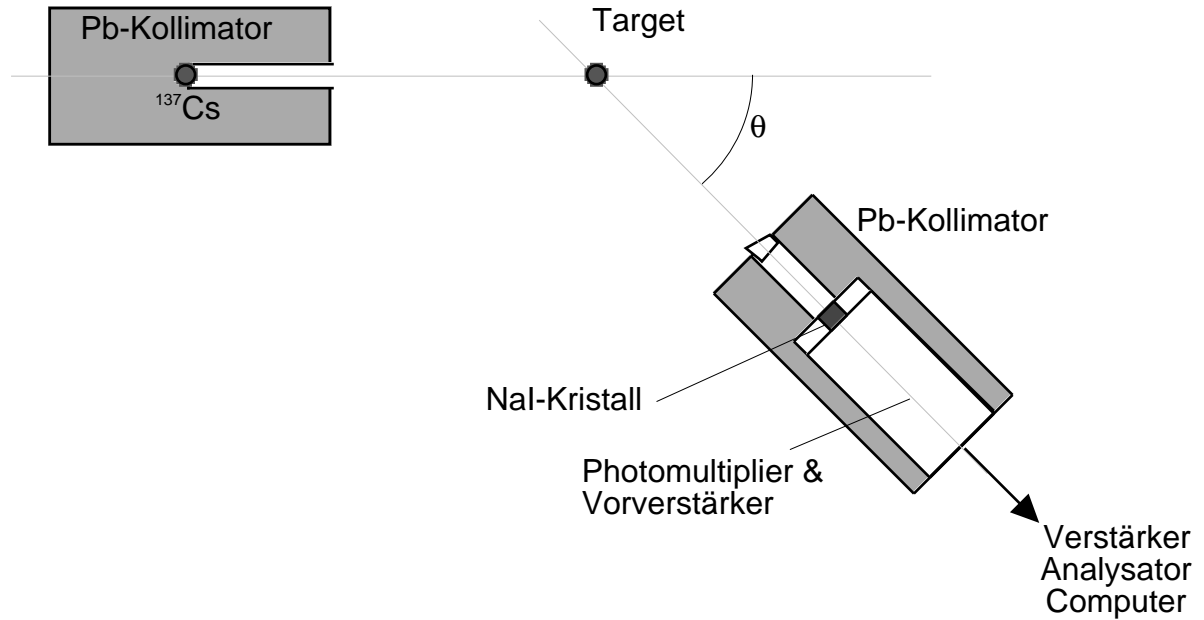


Fig. 4.1: Blockschema der Messapparatur.

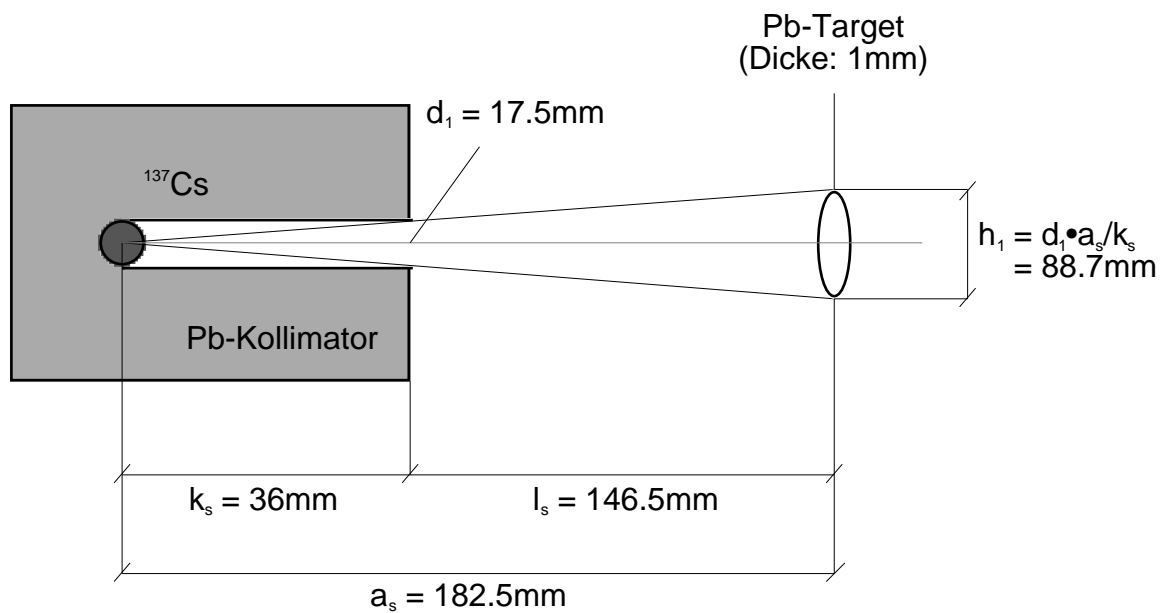
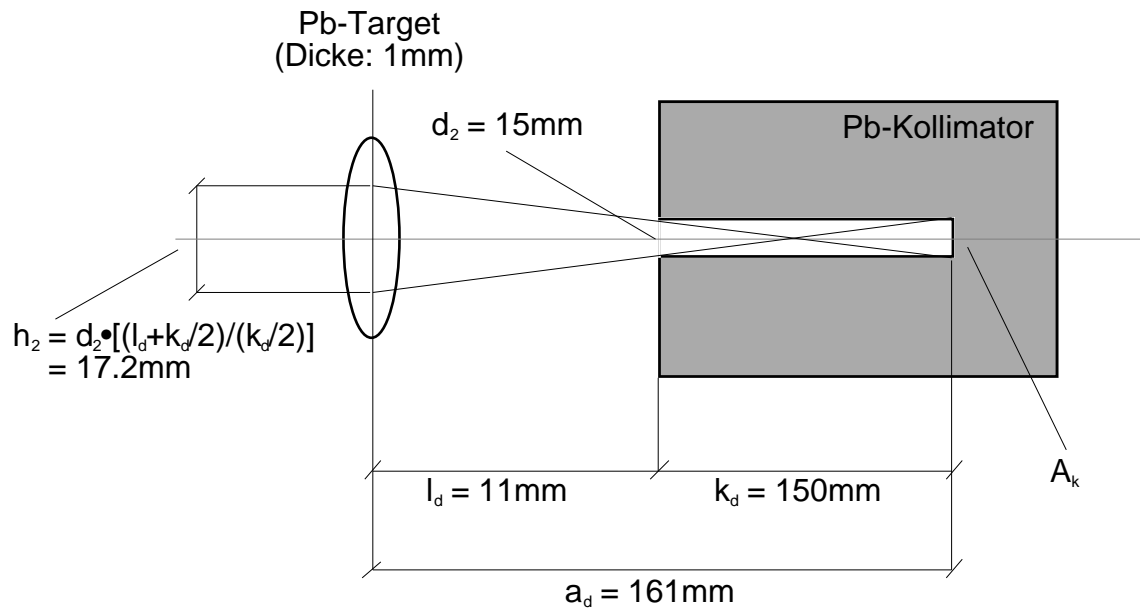


Fig. 4.2: Geometrie der  $^{137}\text{Cs}$ -Quelle.



*Fig. 4.3: Geometrie des Detektoraufbaus.*

Damit sind alle nötigen Angaben zur Geometrie gegeben und der differentielle Wirkungsquerschnitt wird in Kapitel 6 damit berechnet. Wichtig bleibt die Feststellung, dass  $h_1 > h_2$  ist, d.h. der gesamte vom Detektor „gesehene“ Bereich wird tatsächlich von der Quelle bestrahlt.

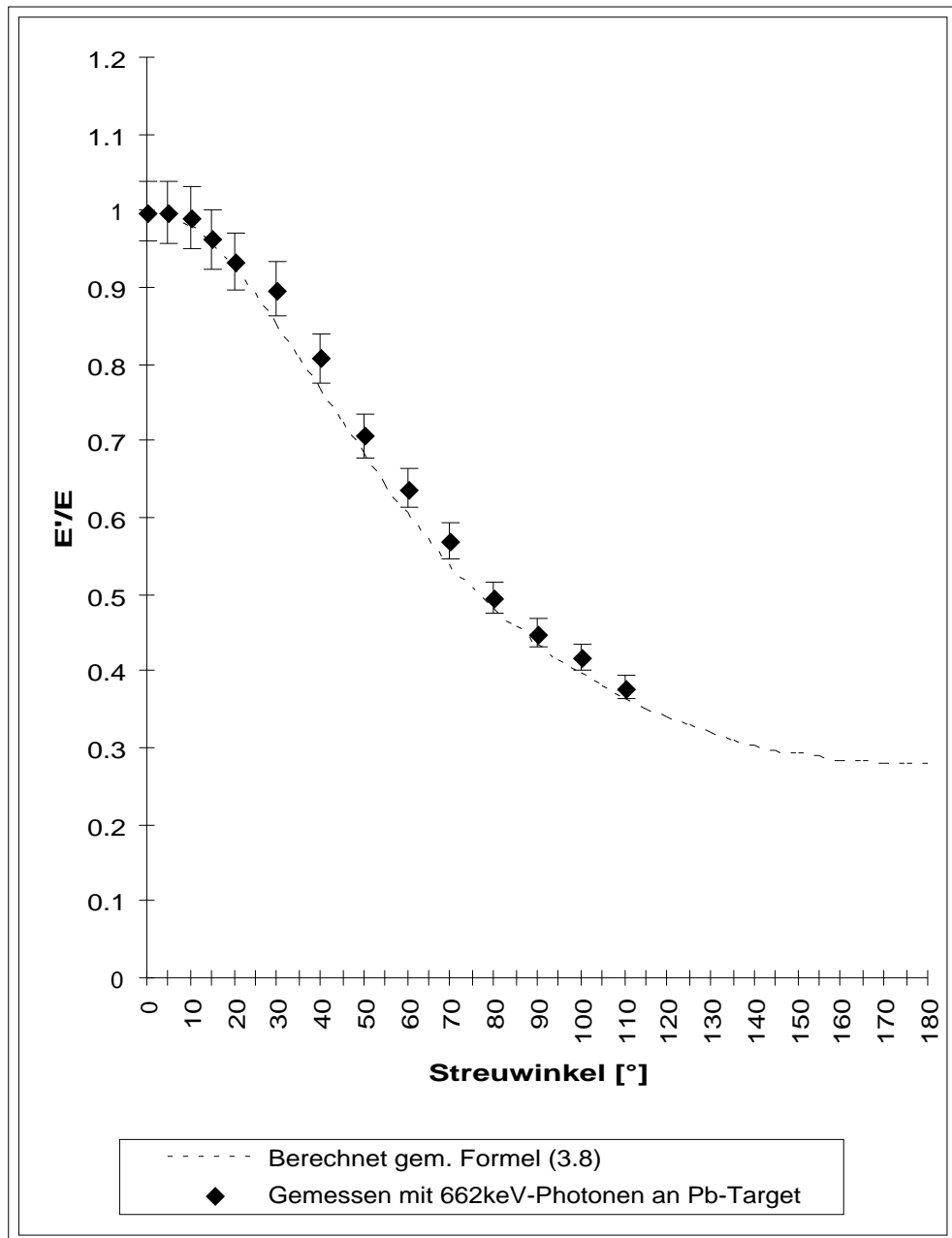
## 5. Messung der Energie der gestreuten $\gamma$ -Quanten

In einer ersten Messung wurden die aus der  $^{137}\text{Cs}$ -Quelle emittierten 662keV-Photonen an einem Blei-Target gestreut. Anschliessend wurde der Photopeak der gestreuten Photonen bei verschiedenen Streuwinkeln bestimmt. Gemäss der Formel (3.8) nimmt die Energie der gestreuten Photonen ab mit zunehmendem Streuwinkel. Dieses Verhältnis und die experimentell erhaltenen Daten sind in Figur (5.1) aufgetragen worden.

Die Energie der gestreuten Photonen reicht von  $E' = E_{\text{max}} = E_0 = 662\text{keV}$  bei  $\theta = 0^\circ$  (keine Streuung) bis  $E' = E_{\text{min}} \approx 0.28 \cdot E_0$  bei  $\theta = 180^\circ$  (Rückstreuung).

Die Winkelabhängigkeit der Energie  $E'$  ist in der klassischen Feldtheorie nicht erklärbar und wird erst durch die Interpretation von Compton verständlich. Diese Ergebnisse sind ein gutes Indiz für die Richtigkeit der korpuskularen Auffassung der elektromagnetischen Strahlung.

Streuwinkel $\theta$ [°]	Energie $E'$ [keV]
0	661±26
5	661±26
10	656±26
15	638±26
20	619±24
30	595±24
40	535±21
50	468±19
60	423±17
70	377±15
80	328±13
90	298±12
100	278±11
110	251±10



*Fig. 5.1: Überprüfung der Winkelabhängigkeit der Energie des gestreuten Photons.*

## 6. Messung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Um den Wirkungsquerschnitt gem. Formel (3.9) auszurechnen, muss zuerst die Einfallende Energie pro Zeit- und Flächeneinheit, d.h. die Intensität der einfallenden Strahlung berechnet werden:

Am 16. 4. 1975 hatte die  $^{137}\text{Cs}$ -Quelle einen Aktivität von:

$$N_0 = N(t=0) = 15\text{mCi} = 555 \cdot 10^6 \text{Bq} \quad (6.1)$$

Die Halbwertszeit von  $^{137}\text{Cs}$  beträgt 30.17a und zwischen Eichdatum und Messtag sind 23.66a vergangen, d.h. die Quelle hatte am Messtag eine Aktivität von:

$$N = N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} \cdot t} = 322 \cdot 10^6 \text{Bq} \quad (6.2)$$

Die einfallende Intensität beträgt:

$$I_{\text{in}} = \frac{N(t) \cdot h\nu}{4\pi r^2} \left[ \frac{\text{eV}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] \quad (6.3)$$

Wobei für r die Länge  $a_s$  (s. Figur 4.2) einzusetzen ist:

$$I_{\text{in}} = \frac{N(t) \cdot h\nu}{4\pi a_s^2} = 509.73 \frac{\text{TeV}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \quad (6.4)$$

Dies ist also die einfallende Intensität.

Und damit zur abgestrahlten Energie: Bei verschiedenen Streuwinkeln wurden sowohl die Streueignisse wie auch die Untergrundeignisse gemessen:

$$N(\theta) \equiv N_{\text{Compton}} = N_{\text{Streuung}} - N_{\text{Untergrund}} \quad (6.5)$$

Die Energie der gestreuten Photonen hängt gem. Formel (3.7) vom Streuwinkel ab; die Nachweiswahrscheinlichkeit des Detektors hängt wiederum von der Energie der gestreuten Photonen ab:

$$E' \equiv E'(\theta) \quad \varepsilon \equiv \varepsilon(E') \quad (6.6)$$

Nun muss noch der Raumwinkel, der vom Detektor „gesehen“ wird, bestimmt werden; dies folgt aus dessen Geometrie (s. Figur 4.3):

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{A_k}{4\pi r^2} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}{4\pi \cdot \left(\frac{k_d}{2} + l_d\right)^2} \quad (6.7)$$

Wobei  $A_k$ , die vom Elektron (in der Pb-Probe) „gesehene“ Detektorfläche ist. Damit ist also der Raumwinkel:

$$d\Omega = \pi \cdot \frac{d_2^2}{(k_d + 2l_d)^2} = 2.389 \cdot 10^{-2} \quad (6.8)$$

Jetzt kann die abgestrahlte Energie pro Zeit- und Raumwinkeleinheit bestimmt werden:

$$\frac{P_{out}}{d\Omega} = \frac{E'(\theta) \cdot \frac{N(\theta)}{\varepsilon(E')}}{d\Omega} \quad (6.9)$$

Nun kann man also den Wirkungsquerschnitt gem. Formel (3.9) berechnen. Dies wurde für verschiedene Streuwinkel gemacht. Die Ergebnisse sind tabelliert (s. Figur 6.1) und können mit den nach Thomson und Klein-Nishina berechneten Wirkungsquerschnitten verglichen werden (s. Figur 6.2). Die Wirkungsquerschnitte sind aber immer pro Elektron angegeben, d.h. man muss noch herausfinden wieviele Elektronen beteiligt sind. Das Volumen des betroffenen Bereichs ist:

$$V = h_2 \cdot d_{Pb} \cdot b_{Pb} \quad (6.10)$$

Wobei  $d_{Pb} = 1\text{mm}$  die Dicke und  $b_{Pb} = 15\text{mm}$  die Breite des Bleistreifens ist. Mit der Dichte ( $\rho_{Pb} = 11.34 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ) bekommt man die Masse Blei, die beteiligt ist und damit die Anzahl Mol ( $m_{Pb} = 207.22\text{u}$  also hat Blei eine molare Masse von  $207.22\text{g/Mol}$ ):

$$n_{Mol} = \frac{m}{m_{Pb}} = \frac{\rho_{Pb} \cdot V}{m_{Pb}} = 0.014 \text{ Mol} \quad (6.11)$$

Nun lässt sich die Anzahl der Elektronen, die beteiligt sind (mit der Avogadro'schen Zahl  $N_A$  und der Ladungszahl von Blei  $Z_{Pb}$ ) leicht ausrechnen:

$$n_e = N_A \cdot n_{Mol} \cdot Z_{Pb} = 6.972 \cdot 10^{23} \quad (6.12)$$

Und damit kommt man zum Ergebnis:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}} = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{total}}}{n_e} = \frac{\left(\frac{P_{\text{out}}}{I_{\text{in}}}\right)_{\text{total}}}{n_e} \quad (6.13)$$

Die Messwerte und die resultierenden Ergebnisse sind unten tabelliert und graphisch veranschaulicht:

Winkel	Counts [Bq]	Untergrund [Bq]	P(out)/dΩ	dσ/dΩ	dσ/dΩ pro Elektron	dσ/dΩ nach Thomson	dσ/dΩ nach Klein-Nishina
0	2265.115	4.285	133276182	2.6146E-07	3.7502E-31	7.9524E-30	7.9524E-30
5	1313.200	4.110	76467170.2	1.5001E-07	2.1517E-31	7.9373E-30	7.8063E-30
10	358.960	3.855	20191494.3	3.9612E-08	5.6816E-32	7.8920E-30	7.3891E-30
15	59.345	3.775	3026421.49	5.9373E-09	8.5159E-33	7.8169E-30	6.7584E-30
20	40.570	4.015	1880593.34	3.6894E-09	5.2917E-33	7.7126E-30	5.9926E-30
25	32.785	3.585	1403316.35	2.7531E-09	3.9487E-33	7.5799E-30	5.1729E-30
30	27.615	3.830	1058960.29	2.0775E-09	2.9798E-33	7.4197E-30	4.3683E-30
35	23.460	3.930	800934.826	1.5713E-09	2.2537E-33	7.2333E-30	3.6275E-30
40						7.0221E-30	2.9782E-30
45						6.7878E-30	2.4303E-30
50						6.5321E-30	1.9813E-30
55						6.2569E-30	1.6213E-30
60						5.9643E-30	1.3373E-30
65						5.6566E-30	1.1157E-30
70						5.3361E-30	9.4408E-31
75						5.0053E-30	8.1159E-31
80						4.6667E-30	7.0938E-31
85						4.3227E-30	6.3038E-31
90						3.9762E-30	5.6907E-31

Fig. 6.1: Gemessene Ereignisse und damit errechnete Wirkungsquerschnitte im Vergleich zu den theoretisch erwarteten Werten nach Thomson und Klein-Nishina.

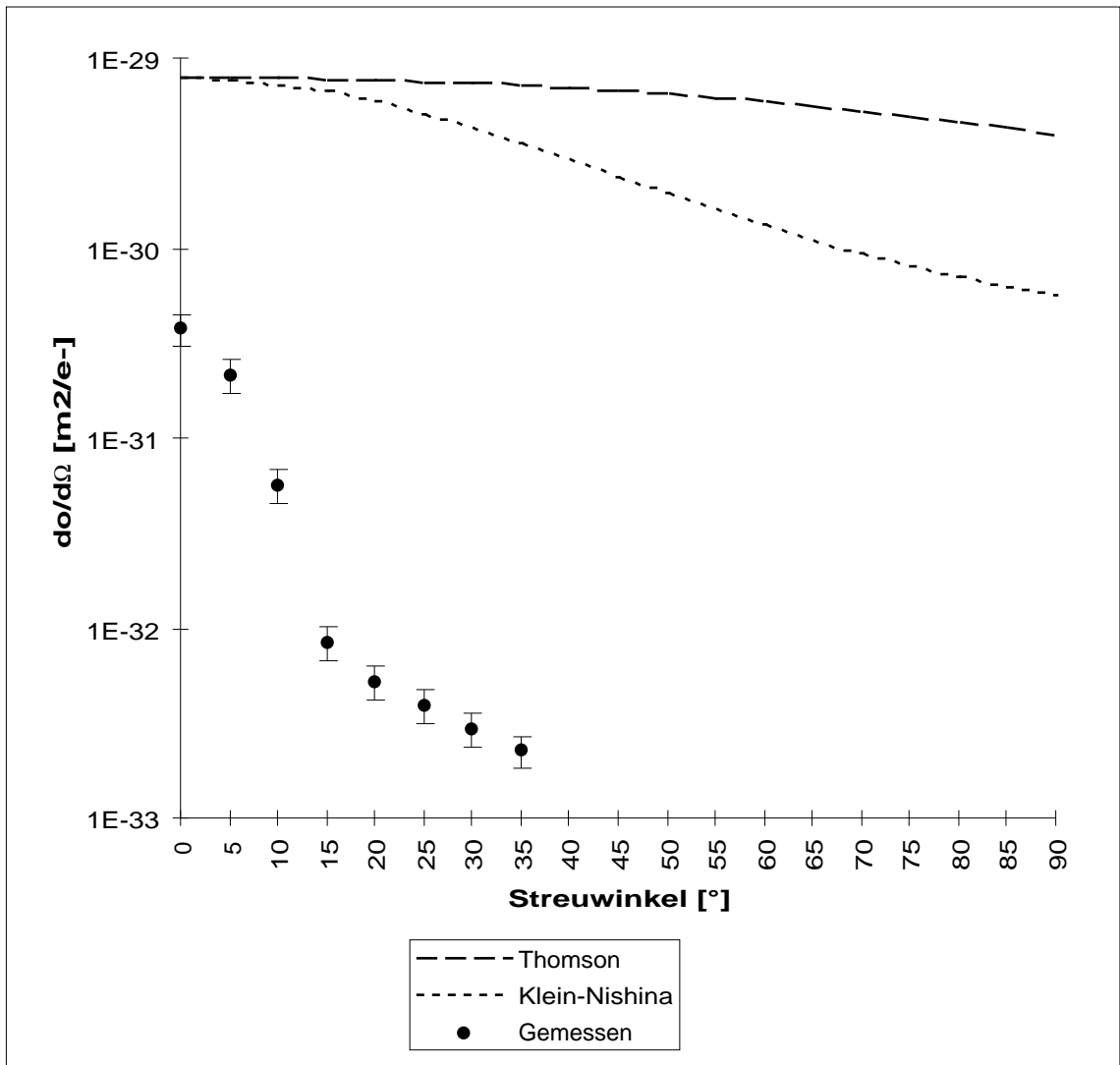


Fig. 6.2: Vergleich zwischen den gemessenen und den berechneten Wirkungsquerschnitten nach Thomson und Klein-Nishina.

Aus der Figur 6.2 sieht man, dass der Wirkungsquerschnitt viel besser beschrieben wird nach der Methode von Klein-Nishina. Dies ist eine weitere Bestätigung der korpuskularen Deutung von elektromagnetischer Strahlung. Viel wichtiger hingegen ist, dass dies der Beweis ist, dass Quanteneffekte, Relativitätstheorie und der Rückstoss der Elektronen beim Compton-Effekt beachtet werden müssen und nur damit eine vollständige Beschreibung des Phänomens gegeben werden kann. Die (klassische) Beschreibung — wie von Thomson benutzt — liefert höchstens eine Approximation.



## 7. Literaturhinweise

- Compton-Effekt, Versuchsanleitung, Physikalisches Praktikum für Vorgerückte, ETHZ
- User Manual for PCA Software, The Nucleus Inc.
- The Quantum Theory of Radiation, W. Heitler
- The Atomic Nucleus, Robley D. Evans, McGraw-Hill, 1955
- Classical Electrodynamics, John D. Jackson, John-Wiley & Sons, 1975